LES
ÉQUATIONS EXPLICITES
DE LA TRAJECTOIRE D'UN CORPUSCULE ÉLECTRIQUE
DANS LE CHAMP D'UN SEUL PÔLE MAGNÉTIQUE

PAR

CARL STØRMER

(VIDENSKABS-SELSKABETS SKRIFTER I. MATHEM.-NATURV. KLASSE 1909. No. 5)

UDGIVET FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

CHRISTIANIA

EN COMMISSION CHEZ JACOB DYBWAD

1909

Fremlagt i Møde i den mathem.-naturv. Klasse 28de Mai 1909.

IMPRIMERIE DE A. W. BRØGGER.

Comme on le sait, M. BIRKELAND a publié en 1896 un mémoire[1] sur le phénomène qu'il a appelé la succion des rayons cathodiques vers un pôle magnétique. Peu de temps après, M. POINCARÉ donna une théorie mathématique[2] de ce phénomène, en appliquant un résultat analytique trouvé par M. DARBOUX[3] en 1878. Par la théorie de M. Poincaré et par des recherehes ultérieures de M. Birkeland[4], on a réussi alors à expliquer tous les détails essentiels du phénomène en question.

Par le résultat de Darboux—Poincaré, prouvant que la trajectoire sera une ligne géodésique sur un certain cône de révolution ayant son sommet au pôle, il est facile par des considérations purement géométriques de trouver les équations explicites de la trajectoire sans aucune intégration nouvelle; en effet, les propriétés de la ligne géodésique du cône sont bien connues. J'ai trouvé ces équations, à savoir les formules des coordonnées d'un point de la trajectoire comme fonctions d'un paramètre et répondant à des conditions initiales données; je donnerai ci-après le résultat obtenu, en le vérifiant par un calcul direct.

1. Supposons, pour fixer les idées, qu'un corpuscule négatif se meut dans le champ d'un seul pôle magnétique sud.

Plaçons[5] un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires avec son origine au pôle. Supposons l'orientation des axes des x, y et z telle qu'un observateur placé sur le plan des x, y, la tête vers les z positifs et regardant vers la quadrant positif des x y, ait l'axe des x à gauche et l'axe des y à droite.

---

[1] Archives des sciences physiques et naturelles, Genève 1896. 4e période, t. I p. 497.

[2] Comptes Rendus t. CXXIII p. 930.

[3] Bulletin des sciences mathématigues 1878. p. 433.

[4] Archives etc. 1898,. t. VI.

[5] Voir mon mémoire: *Sur les trajectoires des corpuscules électrisés dans l'espace sous l'action du magnétisme terrestre, avec application aux aurores boréales*, Archives etc. Juillet – Septembre 1907, § 3.

Cela posé, les équations différentielles de la trajectoire seront:

$$\left.\begin{aligned} H_0\varrho_0 \frac{d^2x}{ds^2} &= \frac{\mu}{r^3}\left(y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds}\right) \\ H_0\varrho_0 \frac{d^2y}{ds^2} &= \frac{\mu}{r^3}\left(z\frac{dx}{ds} - x\frac{dz}{ds}\right) \\ H_0\varrho_0 \frac{d^2z}{ds^2} &= \frac{\mu}{r^3}\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ici μ est l'intensité du pôle et $H_0\,\varrho_0$ une constante caractéristique pour la nature du corpuscule; x, y, z sont les coordonnnées d'un point sur la trajectoire, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ et s est l'arc, pris comme variable indépendante[1].

Le signe des seconds membres change avec le signe de la charge électrique des corpuscules et aussi avec le signe du magnétisme du pôle. Il suffit de traiter le cas indiqué, les trajectoires dans les autres cas s'en déduisant immédiatement[1].

Chez M. Poincaré, le temps t est pris comme variable indépendante au lieu de s; mais comme le corpuscule x se meut avec une vitesse constante v, on a $ds = vdt$, d'où on trouve les équations de M. Poincaré:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\lambda}{r^3}\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\lambda}{r^3}\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\lambda}{r^3}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) \end{aligned}\right\} \quad (1')$$

où la constante λ aura la valeur:

$$\lambda = \frac{\mu v}{H_0\varrho_0}$$

Nous allons conserver s comme variable indépendante. Cela posé, nous allons écrire les équations explicites de la trajectoire correspondant aux conditions initiales suivantes:

---

[1] Pour les détails, voir mon mémoire cité § 4. On emploie le système d'unités centimètre, gramme, seconde.

$$\left.\begin{array}{ll} x = a\,, & \dfrac{dx}{ds} = \alpha \\ y = b\,, & \dfrac{dy}{ds} = \beta \\ z = c\,, & \dfrac{dz}{ds} = \gamma \end{array}\right\} \text{ pour } s = o\,, \qquad (2)$$

α, β et γ satisfaisant à la condition

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \qquad (2')$$

Cela veut dire que la trajectoire doit partir d'un point (a, b, c) avec une tangente en ce point (dans la direction des s croissants) faisant avec les directions positives des axes des angles dont les cosinus sont respectivement égaux à α, β et γ.

Cela posé, les équations de la trajectoire seront

$$\left.\begin{array}{l} x = lu + l'v + l''w \\ y = mu + m'v + m''w \\ z = nu + n'v + n''w \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Ici les l, m et n etc. sont des constantes données par les formules:

$$\left.\begin{array}{l} l = r_m^{-1} \, [a \sin\varphi \sin\omega_0 - (b\,\gamma - c\,\beta)\cos\varphi] \\ m = r_m^{-1} \, [b \sin\varphi \sin\omega_0 - (c\,\alpha - a\,\gamma)\cos\varphi] \\ n = r_m^{-1} \, [c \sin\varphi \sin\omega_0 - (a\,\beta - b\,\alpha)\cos\varphi] \end{array}\right\} \qquad (4\text{ a})$$

$$\left.\begin{array}{l} l' = r_m^{-1} \, [\alpha\, r_0 + a \cos\omega_0] \\ m' = r_m^{-1} \, [\beta\, r_0 + b \cos\omega_0] \\ n' = r_m^{-1} \, [\gamma\, r_0 + c \cos\omega_0] \end{array}\right\} \qquad (4\text{ b})$$

$$\left.\begin{array}{l} l'' = r_m^{-1} \, [a \cos\varphi \sin\omega_0 + (b\,\gamma - c\,\beta)\sin\varphi] \\ m'' = r_m^{-1} \, [b \cos\varphi \sin\omega_0 + (c\,\alpha - a\,\gamma)\sin\varphi] \\ n'' = r_m^{-1} \, [c \cos\varphi \sin\omega_0 + (a\,\beta - b\,\alpha)\sin\varphi] \end{array}\right\} \qquad (4\text{ c})$$

où

$$r_0 = +\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \qquad (5)$$

et où ω_0 est un angle situé dans l'intervalle o à π, défini par la formule

$$\cos \omega_0 = -\frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{r_0} \tag{6}$$

ω_0 sera donc l'angle entre la tangente et la direction du point (a, b, c) à l'origine.

Ensuite

$$r_m = r_0 \sin \omega_0 \tag{7}$$

et φ sera un angle situé dans l'intervalle o à $\frac{\pi}{2}$, défini par la formule:

$$tg\, \varphi = \frac{H_0 \varrho_0}{\mu} r_m \tag{8}$$

Comme nous allons le voir plus tard, φ sera l'angle entre l'axe et la génératrice du cône sur lequel la trajectoire est une ligne géodésique et r_m est la distance minimum de l'origine à la trajectoire, ou bien, ce qui revient au même, la distance constante de l'origine à la tangente d'un point arbitraire sur la trajectoire, ce qu'on voit immédiatement en développant le cône.

Enfin, u, v et w seront des fonctions de s définies par les formules:

$$\left.\begin{aligned} u &= r \sin \varphi . \cos \psi \\ v &= r \sin \varphi \sin \psi \\ w &= r \cos \varphi \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

où

$$\left.\begin{aligned} r &= + \sqrt{r_m{}^2 + (s - s_m)^2} \\ \psi &= \psi_m + \frac{1}{\sin \varphi} arc\, tg \left(\frac{s - s_m}{r_m}\right) . \end{aligned}\right| \tag{10}$$

où l'arc tangente est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ et où les constantes s_m et ψ_m sont données par les formules:

$$\left.\begin{aligned} s_m &= r_0 \cos \omega_0 \\ \psi_m &= \frac{1}{\sin \varphi}\left(\frac{\pi}{2} - \omega_0\right) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Voilà les équations explicites de la trajectoire correspondant aux conditions initiales données.

Si l'on veut avoir le temps t comme variable indépendante, il suffit de substituer $s = vt$, v étant la vitesse en centimètres pr. seconde, les conditions initiales correspondant à $t = o$.

2. Nous allons vérifier les formules directement. D'abord il sera utile d'écrire une série de relations entre les constantes l, l', l'', m, m', m'', n, n' et n'', caractéristiques des cosinus directeurs mutuels de deux systèmes cartésiens.

Nous avons en effet:

$$\left.\begin{array}{ll} l^2 + m^2 + n^2 = 1\,, & ll' + mm' + nn' = 0 \\ l'^2 + m'^2 + n'^2 = 1\,, & l'l'' + m'm'' + n'n'' = 0 \\ l''^2 + m''^2 + n''^2 = 1\,, & ll'' + mm'' + nn'' = 0 \end{array}\right\} \quad (12)$$

et

$$\left.\begin{array}{lll} m'n'' - n'm'' = l\,, & n'l'' - l'n'' = m\,, & l'm'' - m'l'' = n \\ m''n - n''m = l'\,, & n''l - l''n = m'\,, & l''m - m''l = n' \\ mn' - nm' = l''\,, & nl' - ln' = m''\,, & lm' - ml' = n'' \end{array}\right\} \quad (13)$$

L'exactitude de ces relations peut immédiatement être vérifiée par substitution des valeurs tirées des équations (4) et en faisant ensuite usage des relations (2'), (5), (6), (7) et (8).

Cela posé, nous avons

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 = (l^2 + m^2 + n^2)\, u^2 + (l'^2 + m'^2 + n'^2)\, v^2 + \\ + (l''^2 + m''^2 + n''^2)\, w^2 + \\ + 2\,(ll' + mm' + nn')\, uv + 2\,(l'l'' + m'm'' + n'n'')\, vw + \\ + 2\,(ll'' + mm'' + nn'')\, uw \end{aligned}$$

ce qui donne, à cause des relations (12):

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + w^2 = r^2 \qquad (14)$$

Donc le minimum de $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ sera bien r_m, correspondant à $s = s_m$. Ensuite, on trouve

$$y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds} = \left(mn' - nm'\right)\left(u\frac{dv}{ds} - v\frac{du}{ds}\right) + \left(m'n'' - n'm''\right)\left(v\frac{dw}{ds} - w\frac{dv}{ds}\right) + \\ + \left(m''n - n''m\right)\left(w\frac{du}{ds} - u\frac{dw}{ds}\right)$$

c'est-à-dire, à cause des relations (13)

$$y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds} = l\left(v\frac{dw}{ds} - w\frac{dv}{ds}\right) + l'\left(w\frac{du}{ds} - u\frac{dw}{ds}\right) + l''\left(u\frac{dv}{ds} - v\frac{du}{ds}\right)$$

et de la même manière

$$z \frac{dx}{ds} - x \frac{dz}{ds} = m \left(v \frac{dw}{ds} - w \frac{dv}{ds}\right) + m' \left(w \frac{du}{ds} - u \frac{dw}{ds}\right) + m'' \left(u \frac{dv}{ds} - v \frac{du}{ds}\right)$$

$$x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} = n \left(v \frac{dw}{ds} - w \frac{dv}{ds}\right) + n' \left(w \frac{du}{ds} - u \frac{dw}{ds}\right) + n'' \left(u \frac{dv}{ds} - v \frac{du}{ds}\right)$$

Donc, en remarquant que

$$\frac{d^2x}{ds^2} = l \frac{d^2u}{ds^2} + l' \frac{d^2v}{ds^2} + l'' \frac{d^2w}{ds^2}$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = m \frac{d^2u}{ds^2} + m' \frac{d^2v}{ds^2} + m'' \frac{d^2w}{ds^2}$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} = n \frac{d^2u}{ds^2} + n' \frac{d^2v}{ds^2} + n'' \frac{d^2w}{ds^2}$$

on voit, en substituant ces diverses expressions dans les équations différentielles (1), que celles-ci seront satisfaites, si l'on a:

$$\left. \begin{aligned} H_0\varrho_0 \frac{d^2u}{ds^2} &= \frac{\mu}{r^3} \left(v \frac{dw}{ds} - w \frac{dv}{ds}\right) \\ H_0\varrho_0 \frac{d^2v}{ds^2} &= \frac{\mu}{r^3} \left(w \frac{du}{ds} - u \frac{dw}{ds}\right) \\ H_0\varrho_0 \frac{d^2w}{ds^2} &= \frac{\mu}{r^3} \left(u \frac{dv}{ds} - v \frac{du}{ds}\right) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Pour simplifier l'écriture, désignons les dérivées premières et secondes par un et deux accents. Des équations (10) on tire alors

$$\left. \begin{aligned} r' &= \frac{s - s_m}{r}, & r'' &= \frac{r_m^2}{r^3} \\ \psi' &= \frac{1}{\sin\varphi} \frac{r_m}{r^2}, & \psi'' &= -\frac{2}{\sin\varphi} \frac{r_m(s - s_m)}{r^4} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

et, en dérivant les équations (9) il viendra:

$$u' = \sin\varphi\ (r' \cos\psi - \psi' r \sin\psi)$$

$$v' = \sin\varphi\ (r' \sin\psi + \psi' r \cos\psi)$$

$$w' = r' \cos\varphi$$

On en tire

$$vw' - wv' = rr' \sin\varphi \cos\varphi \sin\psi - rr' \sin\varphi \cos\varphi \sin\psi - r^2 \psi' \sin\varphi \cos\varphi \cos\psi$$

d'où

$$vw' - wv' = - r_m \cos\varphi \cos\psi$$

De même on trouve:

$$wu' - uw' = - r_m \cos\varphi \sin\psi \qquad (17)$$

$$uv' - vu' = r_m \sin\varphi$$

En dérivant encore une fois les expressions par rapport à u, v, et w, on aura:

$$u'' = \sin\varphi \; [r'' \cos\psi - \psi'' r \sin\psi - 2 r' \psi' \sin\psi - \psi'^2 r \cos\psi]$$

$$v'' = \sin\varphi \; (r'' \sin\psi + \psi'' r \cos\psi + 2 r' \psi' \cos\psi - \psi'^2 r \sin\psi)$$

et

$$w'' = r'' \cos\varphi$$

En substituant ici les valeurs des dérivées tirées des équations (16), on trouve:

$$u'' = - \frac{r_m^2 \cos^2\varphi \cos\psi}{r^3 \sin\varphi}$$

c'est-à-dire, à cause de la relation (8):

$$u'' = - \frac{\mu}{H_0 \varrho_0} \cdot \frac{1}{r^3} r_m \cos\varphi \cos\psi = \frac{\mu}{H_0 \varrho_0} \cdot \frac{1}{r_3} (vw' - wv')$$

La première des équations (15) est donc vérifiée. De même on trouve:

$$v'' = - \frac{\mu}{H_0 \varrho_0} \cdot \frac{1}{r^3} r_m \cos\varphi \sin\psi = \frac{\mu}{H_0 \varrho_0} \cdot \frac{1}{r^3} (wu' - uw')$$

et

$$w'' = \frac{r_m^2}{r^3} \cos\varphi = \frac{\mu}{H_0 \varrho_0} \cdot \frac{1}{r^3} (uv' - vu')$$

Donc les équations (15) sont vérifiées, et par conséquent aussi les équations différentielles (1).

Il reste à vérifier *les conditions initiales.* On a pour $s = o$:

$$r = r_0\,, \qquad \psi = \psi_m - \frac{1}{\sin\varphi}\cdot arc\, tg\, \frac{s_m}{r_m}$$

Mais, à cause des équations (7) et (11), l'arc tangente est précisément $\frac{\pi}{2} - \omega_0$, donc pour $s = o$

$$\psi = o.$$

Ensuite, pour $s = o$

$$r' = -\frac{s_m}{r_0}, \qquad \psi' = \frac{1}{\sin\varphi}\cdot\frac{r_m}{r_0^{\,2}}$$

On en tire, pour $s = o$:

$$u = r_0 \sin\varphi\,, \qquad v = o\,, \qquad w = r_0 \cos\varphi$$

$$u' = -\cos\omega_0 \sin\varphi\,, \quad v' = \sin\omega_0\,, \quad w' = -\cos\omega_0 \cos\varphi$$

En substituant ces valeurs dans les expressions (3) et dans celles qu'on en obtient par dérivation, il vient:

$$x = lr_0 \sin\varphi + l''r_0 \cos\varphi = a$$
$$y = mr_0 \sin\varphi + m''r_0 \cos\varphi = b$$
$$z = nr_0 \sin\varphi + n''r_0 \cos\varphi = c,$$

et ensuite:

$$\frac{dx}{ds} = -\; l \cos\omega_0 \sin\varphi + l' \sin\omega_0 - l'' \cos\omega_0 \cos\varphi = \alpha$$
$$\frac{dy}{ds} = -\; m \cos\omega_0 \sin\varphi + m' \sin\omega_0 - m'' \cos\omega_0 \cos\varphi = \beta$$
$$\frac{dr}{ds} = -\; n \cos\omega_0 \sin\varphi + n' \sin\omega_0 - n'' \cos\omega_0 \cos\varphi = \gamma$$

Les conditions initiales sont donc vérifiées.

Il reste à démontrer que φ est l'angle entre l'axe et la génératrice du cône sur lequel la trajectoire est une ligne géodésique. Pour cela remarquons que les équations (9) donnent

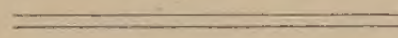
$$u^2 + v^2 = w^2\, tg^2\, \varphi$$

ce qui est precisément l'équation du cône indiqué, dans un système de coordonnées cartésiennes u, v, w ayant leur origine au pôle. L'axe du cône sera l'axe des w.

Par les équations (3), on a effectué une transformation du système de coordonnées u, v, w en un système x, y, z, les $l, l', l'', m, m', m'', n, n' n''$ étant les cosinus directeurs mutuels des axes des deux systèmes.

Ainsi, l'axe du cône fera avec les directions positives des axes des x, y, z des angles dont les cosinus sont respectivement égaux à l'', m'' et n''.

Par les formules explicites de la trajectoire, on peut aisément calculer tous les détails de chaque phénomène de rayons cathodiques dans le champ d'un seul pôle. Ce n'est qu'une question de temps et de patience. C'est précisément ce qui fait l'utilité de ces formules pour les physiciens.



Imprimé le 15 Octobre 1909.